Ondas de choque

Marcelo Oyarzo

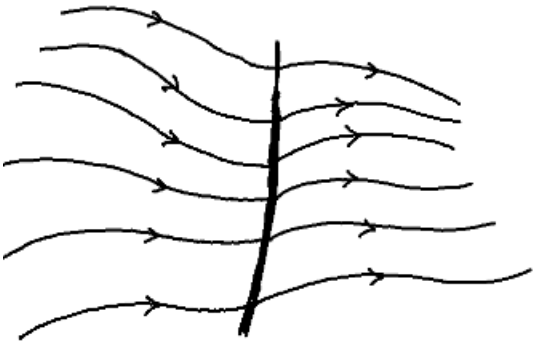
May 26, 2026

En el programa del curso ya hemos discutido las ecuaciones de Euler, la ecuación de continuidad y la noción de ecuación de estado. Hoy vamos a usar esas herramientas para estudiar ondas de choque. El objetivo es entender una idea central: una onda de choque no es una discontinuidad arbitraria, es una discontinuidad compatible con las leyes de conservación pero seleccionadal por la segunda ley.

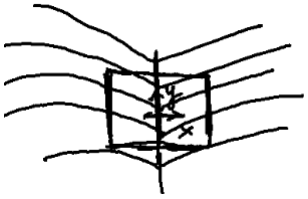
I

En esta clase vamos a estudiar *ondas de choque*, las cuales definiremos como configuraciones discontinuas en el campo de velocidades $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

Para ello, tengamos en mente la siguiente situación en 2 dimensiones: un fluido con un campo de velocidades discontinuo en una región de dimensión 1 del estilo



Ahora vamos a concentrarnos en la vecindad de un punto genérico del choque, algo del estilo



donde vamos a poner el eje x normal al choque y el eje y lo ponemos paralelo al choque. En la aproximación local que estudiaremos, las variaciones relevantes ocurren en la dirección normal al shock. Es decir, el campo de velocidades en esta vista local toma la forma

$$\mathbf{u} = (u(t, x), v(t, x)) \tag{1}$$

por consistencia, la densidad y la presión tampoco dependen de la coordenada y. De esta forma, $u(t, x)$ es la componente de velocidad normal al choque y $v(t, x)$ es la componente de la velocidad

paralela al choque. Entonces la ecuación de Euler y la ecuación de continuidad se reducen a

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}\,, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}=0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0\,. \tag{4}$$

II

Vamos a hacer una pequeña manipulación de las ecuaciones y la escribiremos como sigue: tomamos las dos ecuaciones que vienen de la ecuación de Euler y la densidad de masa en el primer término lo ponemos dentro de la derivada temporal, usando la ecuación de conservación de masa, entonces el sistema queda

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+P)=0\,, \qquad \textbf{(Conservación del momentum)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v u)=0\,, \tag{6}$$

Estas ecuaciones corresponden a la conservación del momentum (nota el término $\partial P/\partial x$, que modifica de alguna forma la estructura usual de la corriente).

Hasta ahora tenemos 3 ecuaciones independientes para 4 funciones u, v, P, ρ. La cuarta ecuación que nos falta es una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad. Para variaciones adiabáticas podemos considerar una relación de la forma

$$P=P(\rho) \tag{7}$$

El caso más simple de este tipo de relaciones es la del gas ideal

$$\frac{P}{\rho^\gamma}=\text{constante} \tag{8}$$

III

La energía se tiene que conservar, pero si consideramos la densidad de energía y la corriente de flujo de energía como

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)$$

$$j_x=\frac{1}{2}\rho u(u^2+v^2)$$

entonces pasa que $\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial j_x}{\partial x}\neq 0$, de hecho falla por un término del estilo $\mathbf{u}\cdot\nabla P$.

Esto indica que hay energía que se va a energía interna del fluido. La forma de hacer esto compatible

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) + \rho e(\rho) \tag{9}$$

$$j_x = \frac{1}{2}\rho u(u^2+v^2) + \rho u h(\rho) \tag{10}$$

Entonces la ecuación $\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$ se satisface siempre que

$$\frac{d}{d\rho}[\rho e(\rho)] = h(\rho)\,, \qquad \frac{d}{d\rho}[\rho h(\rho)] = h(\rho) + \frac{dP}{d\rho}$$

Dado $P(\rho)$ estas ecuaciones tienen solución. Por ejemplo para el fluido ideal

$$e(\rho) = \frac{1}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} \tag{11}$$

$$h(\rho) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} \tag{12}$$

Comentario final: La presión hace trabajo sobre el fluido; por eso la energía cinética macroscópica no se conserva sola. La energía que falta está en los grados internos.

IV

Dadas las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía, podemos determinar ciertas condiciones para la existencia de una discontinuidad bajo las hipótesis que hemos considerado.

Para simplificar aún más, pero sin perder física, consideremos que el fluido en un intervalo de tiempo suficientemente corto para considerar que las cantidades no dependen del tiempo.[1]

Como el shock no contiene una capa delta de masa, momento o energía, la cantidad almacenada en una caja infinitesimal desaparece; lo que sobrevive es el balance de flujos.

Bajo esta hipótesis las ecuaciones de conservación llegan al siguiente sistema

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2\,, \tag{13}$$

$$\rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2\,, \tag{14}$$

$$\rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2\,, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}u_1^2 + h_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + h_2\,, \tag{16}$$

Podemos simplificar estas cantidades, reemplazando unas por otras, dando lugar a las siguientes ecuaciones

$$\text{(i)} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2\,, \tag{17}$$

$$\text{(ii)} \quad \rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2\,, \tag{18}$$

$$\text{(iii)} \quad v_1 = v_2\,, \tag{19}$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{1}{2}u_1^2 + h_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + h_2 \tag{20}$$

[1] Nota técnica: en realidad consideraremos $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. Entonces todas las ecuaciones de conservación, que son de la forma, $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ las podemos integrar en el intervalo. Si ϵ es pequeño comparado con una longitud característica del problema, entonces podemos definir $A(t,x) = A_-(t)$ para $-\epsilon < x < 0$ y $A(t,x) = A_+(t)$ para $0 < x < \epsilon$. Entonces la integral queda: $\epsilon\frac{d}{dt}[A_+(t) + A_-(t)] + B_+ - B_- = 0$. En el límite cuando $\epsilon \to 0$, la contribución dominante es $B_+ = B_-$.

llamadas *condiciones de salto de Rankine-Hogoniot*. Entre ellas observamos que la velocidad tangente al choque es la misma en ambos lados.

Estas condiciones permiten relacionar las cantidades que caracterizan el fluido justo antes del salto y justo después del salto.

V

Ahora comenzaremos a manipular las ecuaciones para derivar ciertas relaciones.

Usando las ecuaciones (i) y (ii) obtenemos

$$\text{(v)} \qquad \rho_1 u_1^2 = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{-1} (P_2 - P_1) \tag{21}$$

Notando que el lado izquierdo es positivo, quedan dos posibilidades para el lado derecho:

$$\rho_2 > \rho_1 \quad \text{y} \quad P_2 > P_1 \tag{22}$$

o el opuesto, que está relacionado por una transformación de paridad, entonces no hay pérdida de generalidad en considerar la situación de la ecuación anterior. De la desigualdad de densidades, podemos obtener una desigualdad para los módulos de las velocidades normales

$$|u_2| < |u_1| \tag{23}$$

Podemos ver que la presión y la densidad son discontinuas. Pero —**importante**— no sabemos aún si el flujo va para el lado en que la presión aumenta o al revés. Para ello tenemos que esperar un poco.

VI

Definamos una cantidad central en este análisis: *ratio de compresión del choque*

$$r := \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}\,. \tag{24}$$

Podemos ver que las densidades y velocidades normales al choque son proporcionales y el factor de proporcionalidad es r. ¿Qué pasa con las presiones?

Para tener una idea consideramos la ecuación de conservación de la energía (iv) para un gas ideal, que es

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_2}{\rho_2} \tag{25}$$

mientras que de la ecuación (v) podemos obtener una relación equivalente para $\rho_2 u_2^2$. Ambas en términos de r son

$$\rho_1 u_1^2 = \frac{r}{r-1}(P_2 - P_1)\,, \qquad \rho_2 u_2^2 = \frac{1}{r-1}(P_2 - P_1)\,. \tag{26}$$

Reemplazamos en la ecuación de conservación del momentum y obtenemos una ecuación que solo depende de r, P_1, P_2, γ.

$$r = \frac{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_1}{(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_2} \iff \frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma-1) - r(\gamma+1)}{r(\gamma-1) - (\gamma+1)} \tag{27}$$

El si y solo si, se muestra resolviendo una ecuación lineal. Observe que podemos tomar dos casos límite en la primera ecuación: Ya que estamos considerando $P_2 > P_1$, puede ser mucho más grande o un poco más grande:

Choque grande: $r = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

Choque pequeño: Una onda de sonido grande.

VII

Hay algo que no le hemos hecho frente aún. Las ecuaciones de conservación no nos dicen hacia dónde va el flujo. Es decir, si seguimos una parte del fluido en el sentido Lagrangiano, después de pasar el choque, ¿la presión aumenta o disminuye? ¿Qué pasa con la velocidad? Etc.

Con las fórmulas que hemos desarrollado e imponiendo la segunda ley de la termodinámica, que dice que la entropía no puede disminuir, podemos concluir algo.

La densidad de entropía para un gas ideal, $s = S/V$, es

$$s(t,x) = C_V \log\left[\frac{P(t,\mathbf{x})}{P_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho(t,\mathbf{x})}\right)^{\gamma}\right] \tag{28}$$

la cual da lugar a nuestra conocida cantidad conservada en procesos adiabáticos reversibles $P\rho^{-\gamma} =$ constante. Veamos cómo la entropía cambia a través del shock

$$s_2 - s_1 = C_V \log\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right] \tag{29}$$

de las relaciones anteriores podemos escribir

$$s_2 - s_1 = C_V \log \underbrace{\left[\frac{r(\gamma+1)-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-r(\gamma-1)} r^{-\gamma}\right]}_{f(r)} = C_V \log\left[\frac{r_{\max} r - 1}{r_{\max} - r} r^{-\gamma}\right]. \tag{30}$$

Note que para $r = 1 \implies f(1) = 1 \implies s_2 = s_1$, mientras que para $r > 1, \gamma > 1$, vemos que $f(r)$ es siempre creciente, de hecho su derivada es

$$\frac{df}{dr} = \frac{\gamma(\gamma^2-1)(r-1)^2}{[1+\gamma-r(\gamma-1)]^2 r^{1+\gamma}} > 0 \tag{31}$$

Por lo tanto $s_2 > s_1$ y entonces el fluido va desde la región 1 a la región 2. Ahora podemos dibujar las flechas en el dibujo.

Entonces aprendimos lo siguiente:

- El flujo va de la región 1 a la región 2
- La presión aumenta
- La densidad aumenta
- La velocidad normal disminuye y la velocidad tangente se conserva.

Nota 1: Los shocks siempre comprimen el fluido y disminuyen la rapidez del fluido para cualquier ecuación de estado $P = P(\rho)$.

Nota 2: El hecho de que la entropía aumenta implica que los shocks son disipativos. Entonces un shock es un *evento violento* que surge en la evolución del sistema. Observe que hemos considerado una ecuación que no tenía un término disipativo y además estamos considerando procesos adiabáticos reversibles.

Nota 3: La disipación fue capturada por permitir que la energía interna $e(\rho)$ aumente. Para entender mejor el proceso de disipación hay que estudiar el rol que juega el término de disipación en *suavizar* el choque. En todo caso, estos detalles microscópicos no afectan lo que se disipó. Que, tal como mostramos, está completamente determinado por las leyes de conservación.

Entonces, la conclusión es que al cruzar un shock físico el fluido se comprime: aumentan la presión y la densidad, disminuye la velocidad normal, y la velocidad tangencial se conserva. La pregunta que queda como problema natural es: ¿cuándo puede formarse un shock? Esa pregunta nos lleva a definir número de Mach normal y a la condición de flujo entrante supersónico.